数学の研究を始めよう (V)
オイラーをモデルに数論研究 第3章
スーパー, および, ウルトラオイラー完全数

飯高 茂

平成 30 年 3 月 11 日

1　スーパーオイラー完全数 I 型

オイラー完全数の本格的議論は本書第 6 章に委ねるが, ここではとりあえず定義を述べる.

$q = \varphi(2^e) + 1 + m$ が素数の時,$\alpha = 2^e q$ を平行移動 m のオイラー完全数という.

オイラー完全数 α の 2 べき部分 2^e を取り出して $a = 2^e$ の特徴付けを行うことになる. これによってスーパーオイラー完全数が出てくるに違いない.

発想はごく自然なものであるが余りにも安易な態度でスーパーオイラー完全数を導入しているように思われる.

我々は幸いにも数学をやっているとき新しいものを考えそれを調べるにあたり特に費用はかからない.

とりあえず考えたのでやってみようという程度の話から出発してよいのだ. スーパーオイラー完全数の導入によって得られた成果は驚くほど豊かなものだった. このような成功物語ができることは, 数学の研究のときそれほど多くは無い. 比較にならない例をあげる.

私はかって天文学にあこがれた. しかし天文学の研究では, 人工衛星を打ち上げることが必要なのだそうだ (30 年以上昔の話). 人工衛星を打ち上げるとき 100 億円ほどかかるが, それから得られた結果を解析すると理学博士の学位が得られるような論文をかけるという. 正直のところ数学をやっていて良かったと思った.

閑話休題, q は素数なので $\varphi(q) = q - 1$ を満たす.

この左辺は $q = \varphi(a) + 1 + m$ を代入すると $\varphi(\varphi(a) + 1 + m)$ になる.

この右辺は $q - 1 = \varphi(a) + m$. よって等式

$$\varphi(\varphi(a) + 1 + m) = \varphi(a) + m.$$

この式を 2 倍して,$2\varphi(a) = a$ を利用すれば

$$2\varphi(\varphi(a) + 1 + m) = a + 2m.$$

この式は a を未知数としてみたスーパーオイラー完全数 I 型の定義方程式と呼ばれこの方程式の解を スーパーオイラー完全数 I 型という.

定理 1　$2\varphi(\varphi(a) + 1 + m) = a + 2m$ の解は $a = 2^e$ で $q = 2^{e-1} + 1 + m$ は素数.

Proof.

解は偶数なので $a = 2^e L, (L : 奇数)$ と書ける. $\varphi(a) + 1 + m = 2^{e-1}\varphi(L) + 1 + m$ により

$$\varphi(\varphi(a) + 1 + m) \leq \varphi(a) + m = 2^{e-1}\varphi(L) + m.$$

$2\varphi(\varphi(a) + 1 + m) = a + 2m$ を使うと $\varphi(L) \geq L$. よって $L = 1$, $a = 2^e$.

$x = \varphi(a) + 1 + m = 2^{e-1} + 1 + m$ とおくとき $2\varphi(x) = 2\varphi(\varphi(a) + 1 + m) = a + 2m$ により

$$a + 2m = 2^e + 2m = 2\varphi(x) \leq 2(x - 1) = 2^e + 2m = a + 2m.$$

ゆえに $2\varphi(x) = 2(x - 1)$. したがって x は素数.

End

解 $a = 2^e$ は $\alpha = 2^e x$ の 2 べき部分.

例 $m = 0$ とおくと, スーパーオイラー完全数 I 型の定義方程式は $2\varphi(\varphi(a) + 1) = a$.

これの解は $a = 2^e$ で $q = 2^{e-1} + 1$ は素数. $e = 1$ なら $a = q = 2$. $e > 1$ なら $e = 1 + 2^r$ と書けて $q = 2^{2^r} + 1$ は素数となる. このとき, $r = 0, 1, 2, 3, 4$ となる場合しか知られていない.

2　スーパーオイラー完全数 I 型の諸例

$q = \varphi(a) + 1 + m = 2^{e-1} + 1 + m$ とその素因数分解を載せた.

表 1: $m = -2$, スーパーオイラー I 型完全数 の例

a	素因数分解	q	素因数分解
8	2^3	3	3
16	2^4	7	7
64	2^6	31	31
256	2^8	127	127
16384	2^{14}	8191	8191

$a = 2^e$ となるとき $q = 2^{e-1} + 1 + m = 2^{e-1} - 1$ は素数. とくに q はメルセンヌ素数.

表 2: $m = -1$, スーパーオイラー I 型完全数 の例

a	素因数分解	q	素因数分解
4	2^2	2	2

$a = 2^e$ となるとき $q = 2^{e-1} + 1 + m = 2^{e-1}$ は素数.

表 3: $m = 0$, スーパーオイラー I 型完全数 の例

a	素因数分解	q	素因数分解
2	2	2	2
4	2^2	3	3
8	2^3	5	5
32	2^5	17	17
512	2^9	257	257
131072	2^{17}	65537	65537

$a = 2^e$ となるとき $q = 2^{e-1} + 1 + m = 2^{e-1} + 1$ は素数.
q はフェルマ素数.

表 4: $m = 1$, スーパーオイラー I 型完全数 の例

a	素因数分解	q	素因数分解
2	2	3	3

表 5: $m = 2$, スーパーオイラー I 型完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
4	2^2	5	5
8	2^3	7	7
16	2^4	11	11
32	2^5	19	19
128	2^7	67	67
256	2^8	131	131
8192	2^{13}	4099	4099

$a = 2^e$ となるとき $q = 2^{e-1} + 1 + m = 2^{e-1} + 3$ は素数.

表 6: $m = 3$, スーパーオイラー I 型完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
2	2	5	5

表 7: $m = 4$, スーパーオイラー I 型完全数 の例

a	素因数分解	q	素因数分解
4	2^2	7	7
16	2^4	13	13
64	2^6	37	37
4096	2^{12}	2053	2053

$a = 2^e$ となるとき $q = 2^{e-1} + 1 + m = 2^{e-1} + 5$ は素数.

かくしてスーパーオイラー完全数 I 型の解は明快にわかった. しかし研究がうまくいって分かりすぎるのも物足らないことがある.

そこでスーパーオイラー完全数 II 型を新たに導入した.

3　スーパーオイラー完全数 II 型

$\sigma(a)$ の代わりにオイラー関数 $\varphi(a)$ を用いて平行移動 m のスーパーオイラー完全数 II 型を定義してみよう.

$q_0 = 2^e + 1 + m$ は素数とする. $a = 2^e$ とおく.

$a = 2\varphi(a)$ により $q_0 = 2\varphi(a) + 1 + m$. 代入して $\varphi(q_0) = \varphi(2\varphi(a) + 1 + m)$.

q_0 は素数だから $\varphi(q_0) = q_0 - 1$.

一方, $q_0 - 1 = a + m$. これらを組み合わせると,

$$\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m.$$

a を未知数としてこれを スーパーオイラー完全数 II 型の定義方程式という. この解をスーパーオイラー II 型完全数という.

3.1　m:偶数の場合

$\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m$ において, m を偶数と仮定する. オイラー関数は自然数について定義されるので, $x = 2\varphi(a) + 1 + m \geq 1$.

一般に $\varphi(x)$ は $x > 2$ なら偶数なので, $x = 2\varphi(a) + 1 + m$ とおく.

$x > 2$ のとき, $\varphi(x) = a + m$ は偶数. それゆえ a も偶数. よって奇数の L によって $a = 2^e L$ と書ける.

I)$x = 2\varphi(a) + 1 + m > 2$ とすると $\varphi(x) \leq x - 1 = 2\varphi(a) + m$,

$$a + m = \varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = \varphi(x) \leq x - 1 = 2\varphi(a) + m,$$

$$2^e L + m = a + m \leq x - 1 = 2\varphi(a) + m = 2^e \varphi(L) + m.$$

よって,$L \leq \varphi(L)$. したがって, $L = 1, a = 2^e$. $x = 2\varphi(a) + 1 + m = 2^e + 1 + m$,

$$\varphi(x) = \varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m = 2^e + m = x - 1.$$

ゆえに $x = 2^e + 1 + m$ は素数.

2)$x = 2\varphi(a) + 1 + m = 2$ とする. $\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = \varphi(x) = \varphi(2) = 1 = a + m$ により $a + m = 1$.

$x = 2\varphi(a) + 1 + m = 2$ により $2\varphi(a) + 1 + m = 2.m = 1 - a$ により $2\varphi(a) + 1 + 1 - a = 2$ なので $2\varphi(a) = a$. よって, $a = 2^e$ となり, $m = 1 - 2^e$. m は偶数なので, $e = 1, a = 1, m = 0$.

3)$x = 2\varphi(a) + 1 + m = 1$ とする.

$2\varphi(a) + m = 0$.

$\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m$ により, $1 = a + m$. $2\varphi(a) + m = 0$ なので $2\varphi(a) = -m = a - 1$.

ところで, $2\varphi(a) = a - 1$ を満たす a は存在しない, という予想がある. そこでこれを仮説として使う.

したがって, $x = 2\varphi(a) + 1 + m = 1$ となる場合はないと理解する. この仮説を用いた結果次の定理ができた.

定理 2 m を偶数と仮定する. $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解は $a=2^e$, ここで, $Q=2^e+1+m$ は素数. *(これを擬メルセンヌ素数とよぶ)*

ここで, $m=0$ なら $Q=2^e+1$ はフェルマ素数.
$m=-2$ なら $Q=2^e-1$ はメルセンヌ素数.

表 8: スーパーオイラー II 型完全数 の例

$m=0$			$m=4$		
a	factor	擬メルセンヌ素数	a	factor	擬メルセンヌ素数
2	2	3	2	2	7
4	2^2	5	8	2^3	13
16	2^4	17	32	2^5	37
256	2^8	257	2048	2^{11}	2053

II. $x=2\varphi(a)+1+m=2$ とする. 定義式から $\varphi(x)=1=a+m$ によって, $2\varphi(a)=a, 1=a+m$. これより, $a=2^e, m=1-2^e$. m:奇数の場合になるが, これは, $m=1-2^e$ のとき解 $a=2^e$ があることを意味する.

3.2 m:奇数の場合

$\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解を求める.
m を奇数と仮定する. $x=2\varphi(a)+1+m$ とおく.
一般に $x>2$ なら $\varphi(x)$ は 偶数なので a も奇数.
$x=1,2$ の場合はすでに示した.

命題 1 m を奇数とし $m=2N-1\geq -1$ とする. $m\geq -1$ の場合.
$\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ の解があると仮定すると ,1)$N=0$ のとき $m=-1, a=2$, またはフェルマ素数, *2)* $N=1$ のとき $x=1, a=1$.

Proof.
$m=2N-1$ なので $2\varphi(a)+1+m=2(\varphi(a)+N)$ によって

$$\varphi(2(\varphi(a)+N))=a+2N-1.$$

$b=\varphi(a)+N$ とおくとき $\varphi(2b)=a+2N-1$.
$b=\varphi(a)+N=2^\varepsilon L(L:\text{奇数})$ の形に書く.
$\varphi(2b)=\varphi(2^{\varepsilon+1}L)=2^\varepsilon\varphi(L)$ を用いて次のように式変形を行う.

$L > 2$ のとき, $L - \varphi(L) \geq 1$ により

$$\begin{aligned} a + 2N - 1 &= \varphi(2b) \\ &= 2^{\varepsilon}\varphi(L) \\ &\leq 2^{\varepsilon}(L-1) \\ &= \varphi(a) + N - 2^{\varepsilon} \\ &\leq a - 1 + N - 2^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

これより

$$a + 2N - 1 \leq a - 1 + N - 2^{\varepsilon}.$$

$N \leq -2^{\varepsilon} \leq -1$. よって $m \leq -3$.

$L = 1$ のとき, $b = \varphi(a) + N = 2^{\varepsilon}$.
一方, $2^{\varepsilon} = \varphi(2b) = a + 2N - 1$, により

$$a + 2N - 1 = 2^{\varepsilon} = \varphi(a) + N$$

$a > 1$ ならば $1 + 2N - 1 \geq a - \varphi(a) + 2N - 1 = N$. $2N \geq N$. ゆえに $N = 0, a - \varphi(a) = 1$.
したがって, $b = 2^{\varepsilon} = \varphi(a) + N = a - 1$.
ゆえに,$a = 1 + b = 1 + 2^{\varepsilon}$ は素数なのでこれが奇数なら a はフェルマ素数. $\varepsilon = 0$ のとき, $a = 2$.
したがって, 解は 2 またはフェルマ素数.
End

$a = 1$ ならば $a + 2N - 1 = \varphi(a) + N$ に代入すれば, $2N = 1 + N$. よって,$N = 1$.

3.3 $m = 1 - 4k$ の場合

m が奇数のとき $m = 1 - 4k, m = -1 - 4k$ の 2 通りある.
高橋洋翔のプリントにしたがい,$m = 1 - 4k, (k > 0)$ とする.
$\varphi(2\varphi(a) + 2 - 4k) = a + 1 - 4k$ となる.
$b = \varphi(a) + 1 - 2k$ とおくと, これは奇数.
$k > 0, 2\varphi(a) \geq 4k - 2 + 2 \geq 4$ により $\varphi(a) \geq 2$. よって $a > 2$.
かくして

- $a = \varphi(b) - 1 + 4k$,
- $b = \varphi(a) + 1 - 2k$.

これを a, b についての連立方程式とみる.
1) $b = 1$ と仮定すると, $\varphi(a) - 2k = 0, a = 4k$. よって, $2\varphi(a) = a$ が成り立つので, $a = 2^e, m = 1 - 2^e$.
したがって, $m = 1 - 2^e$ なら $a = 2^e$ は解のひとつ.

2) $b > 1$ の場合 $\varphi(b) \leq b - 1 = \varphi(a) - 2k$ によって,

$$a + 1 - 4k \leq \varphi(a) - 2k.$$

一般に $co\varphi(a) = a - \varphi(a)$ と定めこれをオイラー余関数と呼ぶ. すると,
$co\varphi(a) = a - \varphi(a) \leq 2k - 1$. したがって, $co\varphi(a) = 1, 2, \cdots, 2k - 1$ となる.
(a, b) についての連立方程式の両辺を加えると $a + b + 1 - 4k = \varphi(a) + 1 - 2k + \varphi(b)$
整理して

$$a + b - 2k = \varphi(a) + \varphi(b).$$

余関数 $co\varphi(a)$ を使うと,

$$co\varphi(a) + co\varphi(b) = 2k.$$

これは美しい関係式である.
$b > 1$ なので $co\varphi(b) \geq 1$. よって,$co\varphi(a) \leq 2k - 1$.

補題 1 $co\varphi(a) \leq 2k - 1$.

3.4 $k = 1$ のとき

$m = -3$.

$$co\varphi(a) + co\varphi(b) = 2k = 2.$$

これより $co\varphi(a) = co\varphi(b) = 1$ になり, (a, b) は素数の対.
連立方程式より $b = a - 2$: 素数. よって (a, b) は双子素数.

3.5 オイラー余関数の評価

一般に $a > 1$ なら $co\varphi(a) \geq 1$.
次の結果はやさしいが有用.

表 9: $F(a) = co\varphi(a) - \sqrt{a}$; a が素数でも平方数でもない,

a	factor	$\varphi(a)$	$co\varphi(a)$	$F(a)$
6 (8)	$[2,3]$	2	4	1.550510257
10	$[2,5]$	4	6	2.83772234
15 (49)	$[3,5]$	8	7	3.127016654
14 (16)	$[2,7]$	6	8	4.258342613
12	$[2^2,3]$	4	8	4.535898385
21 (27)	$[3,7]$	12	9	4.417424305
35 (121)	$[5,7]$	24	11	5.083920217
22	$[2,11]$	10	12	7.30958424
20	$[2^2,5]$	8	12	7.527864045
18	$[2,3^2]$	6	12	7.757359313
33	$[3,11]$	20	13	7.255437353
26	$[2,13]$	12	14	8.900980486
55	$[5,11]$	40	15	7.583801513
39	$[3,13]$	24	15	8.755002002
28 (32)	$[2^2,7]$	12	16	10.70849738
24	$[2^3,3]$	8	16	11.10102051
77	$[7,11]$	60	17	8.225035613
65	$[5,13]$	48	17	8.937742252
34	$[2,17]$	16	18	12.16904811
91	$[7,13]$	72	19	9.460607986
51	$[3,17]$	32	19	11.85857157
38	$[2,19]$	18	20	13.835586
85	$[5,17]$	64	21	11.78045554
57	$[3,19]$	36	21	13.45016556
45	$[3^2,5]$	24	21	14.29179607
30	$[2,3,5]$	8	22	16.52277442

この表で, 6 (8) は $co\varphi(8) = co\varphi(6) = 2$ を意味する.

3.6 $k = 2$ のとき

$m = -7$ になり次の連立方程式 ができる.

- $a = \varphi(b) - 1 + 4k = \varphi(b) + 7 \geq 8$,
- $b = \varphi(a) + 1 - 2k = \varphi(a) - 3$.

$$co\varphi(a) + co\varphi(b) = 2k = 4.$$

これより

i).$co\varphi(a)=1, co\varphi(b)=3$ のとき
$co\varphi(b)=3$ によって, $b=9$. $a=\varphi(b)+7=13$. $b=\varphi(a)-3=12-3=9$. 連立方程式 が解けて解 $=13$.

ii). $co\varphi(a)=3, co\varphi(b)=1$ のとき
$a=9=3^2$, $b=\varphi(a)+1-2k=6+1-4=3$. $a=9=3^2$ は解.
$m=1-2^3$ なので, $a=2^3$ も解.

3.7 $k=3$ のとき

$m=-11$.

- $a=\varphi(b)-1+4k=\varphi(b)+11\geq 12$,
- $b=\varphi(a)+1-2k=\varphi(a)-5$.

$$co\varphi(a)+co\varphi(b)=2k=6.$$

これより
i). $co\varphi(a)=1, co\varphi(b)=5$ のとき
$co\varphi(b)=5$ によって, $b=25$. $a+1-4k=a+1-12=\varphi(b)=20$. すなわち $a=31$. $b=\varphi(a)-5=30-5=25$. $a=31$ は解.

ii). $co\varphi(a)=2, co\varphi(b)=4$ のとき $a=4$ なので矛盾.
iii). $co\varphi(a)=3, co\varphi(b)=3$ のとき
$a=9, b=9$ なので矛盾.
iv). $co\varphi(a)=4, co\varphi(b)=2$ のとき
$b=4$, $a+1-4k=a+1-12=\varphi(b)=2$. すなわち $a=13$. $b=\varphi(a)-5=7$, 矛盾.
v). $co\varphi(a)=5, co\varphi(b)=1$ のとき
$a=25$, $b=\varphi(a)+1-2k=20+1-6=15$. 素数にならないので矛盾
以上により,$a=31$ のみが解.

3.8 $k=4$ のとき

$m=-15$.

- $a=\varphi(b)-1+4k=\varphi(b)+15\geq 16$,
- $b=\varphi(a)+1-2k=\varphi(a)-7$.

$$co\varphi(a) + co\varphi(b) = 2k = 8.$$

i). $co\varphi(a) = 1, co\varphi(b) = 7$ のとき $co\varphi(a) = 1$. よって a は素数. $co\varphi(b) = 7$ によって, $b = 49, 15$.
$b = 49$ のとき, $a = \varphi(b) + 15 = 42 + 15$. 素数ではない.
$b = 15$ のとき, $a = \varphi(b) + 15 = 8$. すなわち $a = 23$: 素数. $b = \varphi(a) - 7 = 15$. $a = 23$ は解.
ii) $co\varphi(a) = 2, 3, 4$ なら $a \geq 16$ に反する.
iii) $co\varphi(a) = 5$ なら $co\varphi(b) = 3, a = 25$. $b = \varphi(a) - 7 = 20 - 7 = 13$. $co\varphi(b) = 3$ に矛盾.
iv) $co\varphi(a) = 6$ なら $co\varphi(b) = 2, b = 4$. $a = \varphi(b) + 15 = 17$ $b = \varphi(a) - 7 = 16 - 7 = 9$.
v) $co\varphi(a) = 7$ なら $a = 49, 15; co\varphi(b) = 1$.
$a = 49$ なら $b = \varphi(a) - 7 = 42 - 7 = 35$; 素数ではない.
$a = 15$ なら $b = \varphi(a) - 7 = 1$; 素数ではない.
一方, $m = -15 = 1 - 2^4$ により $a = 2^4 = 16$ も解.
以上によって, $a = 2^4 = 16, 23$.

3.9 $k = 5$ のとき

$m = -19$.

- $a = \varphi(b) - 1 + 4k = \varphi(b) + 19 \geq 20$,
- $b = \varphi(a) + 1 - 2k = \varphi(a) - 9$.

$co\varphi(a) + co\varphi(b) = 2k = 10$ により分類.
i). $co\varphi(a) = 1, co\varphi(b) = 9$ のとき
$co\varphi(b) = 9$ によって, $b = 27, 21$.
$b = 27$ のとき, a= $\varphi(b) + 19 = 18 + 19$. すなわち $a = 37$. $b = \varphi(q) - 9 = 36 - 9 = 27$. $a = 37$ は解.
$b = 21$ のとき, $a = \varphi(b) + 19 = 12 + 19$. すなわち $a = 31$. $b = \varphi(a) - 9 = 21$. $a = 31$ は解.
ii).
$co\varphi(a) = 2, 3, 4, 5$ のとき $a = 4, 9, 6, 25$
$a = 25$ ならば,$b = \varphi(a) - 9 = 20 - 9 = 11$; 素数なので矛盾.
iii).
$co\varphi(a) = 6$ のとき $a = 10$. $a \geq 19$ に矛盾.
iv). $co\varphi(a) = 7, co\varphi(b) = 3$. このとき $a = 49, 15$. $b = 9$.
$a = 49$ なら $\varphi(a) = 42$. $b = \varphi(a) + 1 - 2k = 42 - 9 = 31 \neq 9$; 矛盾
$a = 21$ なら $\varphi(a) = 12$. $b = \varphi(a) + 1 - 2k = 12 - 9 = 3$; 矛盾
v). $co\varphi(a) = 8, co\varphi(b) = 2$. $b = 4$.
$a + 1 - 4k = \varphi(b) = 2$ により $a = 11$. 矛盾
vi). $co\varphi(a) = 9, co\varphi(b) = 1$. $a = 27, 21$.
$a = 27$ なら, $b = \varphi(a) + 1 - 2k = 10 - 10 = 0$; 矛盾.
$a = 21$ なら, $b = \varphi(a) + 1 - 2k = 13 - 10 = 3$. 素数なので矛盾しない.
結局, $a = 37, 31, 21$.
次の結果はパソコンにによって作った. したがって, 絶対に正しいとはいいかねる.

スーパーオイラー II 型完全数,$m = 1 - 4k(1 \geq k \geq 10)$ の解

m	a
-39	$51 = 3 * 17$, 71 , $91 = 7 * 13$
-35	$65 = 5 * 13$, $77 = 7 * 11$, 83
-31	$32 = 2^5$, $49 = 7^2$, 71
-27	$33 = 3 * 11$, 47
-23	$35 = 5 * 7$, 47
-19	$21 = 3 * 7$, 31 , 37
-15	$16 = 2^4$, 23
-11	$31 = 31$
-7	$8 = 2^3$, $9 = 3^2$, 13
-3	$4 = 2^2$, 5 , 7,13,19,31,43,61

$m = -3$ のとき $a = 4$ 以外は双子素数の兄. たぶん無限にある.
これ以外は, 解は有限個.

4　解の無限性

高橋氏は $m=-1-2^{\varepsilon}$ のとき解は無限にあるのではないかとの推察を私への私信で述べた.

解は無限にあることが証明できれば双子素数は無限にある, という予想まで解ける.

双子素数の無限に実在するという予想は, 現在でも解けていない. しかし 解が無限にあると仮定すれば $m=-1-2^{\varepsilon}$ となることを示すことには成功した.

4.1　$m=1-4k$ のとき

$co\varphi(a)+co\varphi(b)=2k$. これより $k>1$ なら, $co\varphi(a)>1$ または $co\varphi(b)>1$.

$co\varphi(a)>1$ なら, $2k\geq co\varphi(a)\geq\sqrt{a}$. $a<4k^2$ なので, a は有限個.

$co\varphi(a)=1$ でも $co\varphi(b)>1$ なら, $2k\geq co\varphi(b)\geq\sqrt{b}$ よって, b は有限個.

$k=1$ のとき, $co\varphi(a)=co\varphi(b)=1$ であり, (a,b) は双子素数になる. 双子素数の無限性は証明はされていないがほぼ確かである.

4.2　$m=-1-4k$ のとき

$m=-1-4k$ のときを考える. 条件式は $\varphi(2\varphi(a)-4k)=a-1-4k$ となる.

$b=\varphi(a)-2k$ とおくとこれは偶数 ($a>2$), $\varphi(2b)=a-1-4k$ となる. b を素因数分解して, $b=2^{\varepsilon}Q,(Q:$ 奇数$)$ とする.

これより,

$$b=2^{\varepsilon}Q=\varphi(a)-2k,$$

$$\varphi(2b)=\varphi(2^{\varepsilon+1}Q)=2^{\varepsilon}\varphi(Q)=a-1-4k.$$

以上により, a と Q について次の連立方程式がえられた.

- $a=2^{\varepsilon}\varphi(Q)+1+4k,$
- $b=2^{\varepsilon}Q=\varphi(a)-2k.$

両辺を加えると,

$$2^{\varepsilon}\varphi(Q)+a=2^{\varepsilon}\varphi(Q)+1+4k+\varphi(a)-2k.$$

移項して整理すると

$$2^{\varepsilon}co\varphi(Q)+co\varphi(a)=1+2k.$$

以下において, $2^{\varepsilon}co\varphi(Q)+co\varphi(a)=1+2k$ をベースにして, 連立方程式を解く.

a,Q がともに素数なら

$2^{\varepsilon}co\varphi(Q)+co\varphi(a)=2^{\varepsilon}+1=1+2k$ なので $2^{\varepsilon}=2k$.

a :素数が成り立たないなら 評価式 $2k\geq co\varphi(a)\geq\sqrt{a}$ が成り立ち, a は有限個.

Q :素数が成り立たないなら Q は有限個.

よって解が無限にあれば a,Q はともに素数.

4.3 超双子素数

a が素数なら $co\varphi(a) = 1$. よって, $2^\varepsilon co\varphi(Q) = 2k$.
さらに Q が素数なら $co\varphi(Q) = 1$ ならば $2^\varepsilon = 2k$.

命題 2 p と $a = 2^e p + 2^e + 1$ がともに素数なら a は $m = -1 - 2^{e+1}$ のとき
$\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m$ の解

$\alpha = 2^e, \beta = 1 + 2^e$ とおくとき, $p = \dfrac{a - \beta}{\alpha}$ とおくとき a, p はともに素数である. これは超双子素数.

Proof.
$a = 2^e p + 2^e + 1$ は素数なので $\varphi(a) = 2^e p + 2^e = 2^e(p + 1)$.
$2\varphi(a) + 1 + m = 2^{e+1}(p + 1) - 2^{e+1} = 2^{e+1}p$ なので $\varphi((2\varphi(a) + 1 + m)) = 2^e(p - 1)$
一方, $a + m = 2^e p + 2^e + 1 - 1 - 2^{e+1} = 2^e(p - 1)$. よって $\varphi(2\varphi(a) + 1 + m) = a + m$.
End

5 個別計算

5.1 $Q = 1$ のとき.

$Q = 1$ のとき $\mathrm{co}\varphi(Q) = 0$ になり $b = 2^\varepsilon$ になるが最初にこの場合を扱う. ただし $k \leq 5$ とする.
$\varphi(a) - 2k = b = 2^\varepsilon$,$2^\varepsilon = a - 1 - 4k$.
$a = 1 + 4k + 2^\varepsilon$, かつ $\varphi(a) = 2^\varepsilon + 2k$.
これによって $\mathrm{co}\varphi(a) = a - \varphi(a) = 2k + 1$.

i) $k = 1$; $m = -5$.
$\mathrm{co}\varphi(a) = 2k + 1 = 3$ なので $a = 9$.
$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 6 - 2 = 4$. よって, $b = 2^\varepsilon = 4$.
さらに $a = 2^\varepsilon + 1 + 4k = 4 + 5 = 9$. したがって, $\varepsilon = 2; a = 9 = 3^2$ は解.

ii) $k = 2$; $m = -9$.
$\mathrm{co}\varphi(a) = 2k + 1 = 5$ なので $a = 25$.
$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 20 - 4 = 16$. よって,

$$\varepsilon = 4, b = 2^\varepsilon = 16$$

.
さらに $a = 2^\varepsilon + 1 + 4k = 16 + 9 = 25$. したがって, $a = 25 = 5^2$ は解.

iii) $k = 3$; $m = -13$.
$\mathrm{co}\varphi(a) = 2k + 1 = 7$ なので $a = 49, 15$.
a) $a = 49$.
$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 42 - 6 = 36$. ; 矛盾.
b) $a = 15$.

$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 8 - 6 = 2.$;
さらに $a = 2^\varepsilon + 1 + 4k = 2 + 13 = 15.$ したがって, $\varepsilon = 1, a = 15$ は解.

iii) $k = 3$; $m = -13$.
$\mathrm{co}\varphi(a) = 2k + 1 = 7$ なので $a = 49, 15$.
a) $a = 49$.
$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 42 - 6 = 36.$; 矛盾.
b) $a = 15$.
$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 8 - 6 = 2.$;
さらに $a = 2^\varepsilon + 1 + 4k = 2 + 13 = 15.$ したがって, $\varepsilon = 2, a = 15$ は解.

iv) $k = 4$; $m = -17$.
$\mathrm{co}\varphi(a) = 2k + 1 = 9$ なので $a = 27, 21$.
a) $a = 27$.
$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 18 - 8 = 10.$; 矛盾.
b) $a = 21$.
$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 12 - 8 = 4.$;
さらに $a = 2^\varepsilon + 1 + 4k = 21.$ したがって, $a = 21$ は解.

v) $k = 5$; $m = -21$.
$\mathrm{co}\varphi(a) = 2k + 1 = 11$ なので $a = 121,$.
a) $a = 121$.
$2^\varepsilon = \varphi(a) - 2k = 110 - 10 = 100.$; 矛盾.

5.2 $Q > 2$ のとき.

以下において,
$2^\varepsilon co\varphi(Q) + co\varphi(a) = 1 + 2k$ をベースにして, 連立方程式

- $a = 2^\varepsilon \varphi(Q) + 1 + 4k,$
- $2^\varepsilon Q = \varphi(a) - 2k.$

をとく.

i) $k = 1.$ $m = -5.$

- $a = 2^\varepsilon \varphi(Q) + 5,$
- $2^\varepsilon Q = \varphi(a) - 2.$

$2^\varepsilon co\varphi(Q) + co\varphi(a) = 1 + 2k = 3.$ $co\varphi(Q) > 0$ なので,$\varepsilon = 1, co\varphi(Q) = co\varphi(a) = 1.$ a, Q: 素数.
$a = 2^\varepsilon \varphi(Q) + 1 + 4k = 2Q + 5$, $b = 2^\varepsilon Q = 2Q = a - 3.$ a と $Q = \dfrac{b}{2} = \dfrac{a-3}{2}$ はともに素数.

ii) $k=2.\ m=-9.$

- $a=2^{\varepsilon}\varphi(Q)+9,$
- $b=2^{\varepsilon}Q=\varphi(a)-4.$

をとく.

$co\varphi(a)+2^{\varepsilon}co(Q)=1+2k=5.$

1) $co\varphi(Q)\geq 2$ のとき

$\varepsilon>0, co\varphi(Q)\geq 2$ なので $co\varphi(a)=1, 2^{\varepsilon}co\varphi(Q)=4.$

$\varepsilon=1, co\varphi(Q)=2$ になるので $Q=4.$ Q は奇数なので矛盾.

2) $co\varphi(Q)=1$ のとき.

$co\varphi(a)=1, b=2^{\varepsilon}=4, co\varphi(Q)=1.$

$b=\varphi(a)-2k=a-5$ により, $b=4Q$ なので a と $Q=\dfrac{a-5}{4}$ はともに素数. これも超双子素数という.

iii) $k=3.\ m=-13.$

連立方程式

- $a=2^{\varepsilon}\varphi(Q)+13,$
- $2^{\varepsilon}Q=\varphi(a)-6.$

をとく.

$co\varphi(a)+2^{\varepsilon}co\varphi(Q)=1+2k=7.$

1) $co\varphi(Q)>1.$

$\varepsilon>0, co\varphi(Q)\geq 2$ なので

a) $co\varphi(a)=1, 2^{\varepsilon}co\varphi(Q)=6.$

$\varepsilon=1, co\varphi(Q)=3$ になるので $Q=9.$

$a=2^{\varepsilon}\varphi(Q)+13$: 素数ではない.

b) $co\varphi(a)=5, 2^{\varepsilon}co\varphi(Q)=2.$

$a=25, \varepsilon=1, co\varphi(Q)=1.$

$2^{\varepsilon}Q=\varphi(a)-2k=20-6=14.$ よって, $\varepsilon=1, Q=7.$ $a=25=5^2$ は解.

iv) $k=4.\ m=-17.$

$co\varphi(a)+2^{\varepsilon}co\varphi(Q)=1+2k=9.$

$\varepsilon>0, co\varphi(Q)\geq 2$ なので

a) $co\varphi(a)=1, 2^{\varepsilon}co\varphi(Q)=8.$

$co\varphi(Q)=1$ のとき Q も素数で $2^{\varepsilon}=8, \varepsilon=3.$ a, Q は超双子素数である.

$co\varphi(Q)=2$ なら $Q=4, \varepsilon=2.$ $a=2^{\varepsilon}\varphi(Q)+1+4k=8+1+16=25.$ 矛盾.

$co\varphi(Q)=4$ なら $Q=8, 6, \varepsilon=1.$

$Q=8$ のとき,

$a=2^{\varepsilon}\varphi(Q)+1+4k=8+1+16=25.$ 素数でないから矛盾.

$Q=6$ のとき,

$a = 2^{\varepsilon}\varphi(Q) + 1 + 4k = 4 + 1 + 16 = 21$. 素数でないから矛盾.
b) $co\varphi(a) = 3, 2^{\varepsilon}co\varphi(Q) = 6$.
このとき $a = 9, co\varphi(Q) = 3, \varepsilon = 1$.
$a = 2^{\varepsilon}\varphi(Q) + 1 + 4k = 12 + 17 = 29$; 矛盾
c) $co\varphi(a) = 5, 2^{\varepsilon}co\varphi(Q) = 4$.
ゆえに $a = 25, \varepsilon = 1, Q = 4$.
$a = 2^{\varepsilon}\varphi(Q) + 1 + 4k = 4 + 1 + 16 = 21$. これは解.
d) $co\varphi(a) = 7, 2^{\varepsilon}co\varphi(Q) = 2$.
すると $\varepsilon = 1, co\varphi(Q) = 1.a = 49, 21$
$a = 49$ のとき.
$2^{\varepsilon}Q = \varphi(a) - 2k = 42 - 8 = 34$. $\varepsilon = 1, Q = 17$; 素数.
$a = 2^{\varepsilon}\varphi(Q) + 1 + 4k = 32 + 1 + 16 = 49$. これより $a = 7^2 = 49$.

$*$	m	a
	-41	45=$3^2 * 5$,57=$3 * 19$,65=$5 * 13$,169=13^2
	-37	$61, 73$,289=17^2,
$*$	-33	65=$5 * 13$,97=97,193= , $289 = 17^2$,673,769,1153 ,$\cdots$
	-29	33=$3 * 11$,113 ,169= 13^2,
	-25	33=$3 * 11$,61,
$*$	-17	21=$3 * 7$,25=5^2,49=7^2,97 , 113,,$\cdots$
	-13	15=$3 * 5$,25=5^2,
$*$	-9	17,25=5^2, 73 97,193,241 ,$\cdots$
$*$	-5	9=3^2, 13 ,17 ,29,37,41,61,89,$\cdots$

$*$ は超双子素数の箇所を示す.

つぎはより詳しい結果.

表 10: $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$

$m=-3$		$m=-5$			$m=-9$		
a	$a-2$	a	$a-3$	b/2	a	$a-5$	$b/4$
5	3	13	10	5	17	12	3
7	5	17	14	7	73	68	17
13	11	29	26	13	97	92	23
19	17	37	34	17	193	188	47
31	29	41	38	19	241	236	59
43	41	61	58	29	337	332	83
61	59	89	86	43	409	404	101
73	71	97	94	47	433	428	107
103	101	109	106	53	457	452	113
109	107	137	134	67	601	596	149
139	137	149	146	73	673	668	167
151	149	181	178	89	769	764	191
181	179	197	194	97	937	932	233
193	191	229	226	113	1009	1004	251
199	197	257	254	127	1033	1028	257
$4=2^2$		$9=3^2$			$25=5^2$		

表 11: $\varphi(2\varphi(a)+1+m)=a+m$ 続き

$m=-17$			$m=-33$			$m=-65$		
a	$a-9$	b/8	a	$a-17$	b/16	a	$a-33$	$b/32$
97	88	11	97	80	5	193	160	5
113	104	13	193	176	11	257	224	7
193	184	23	673	656	41	449	416	13
241	232	29	769	752	47	577	544	17
257	248	31	1153	1136	71	641	608	19
337	328	41	2113	2096	131	769	736	23
353	344	43	2689	2672	167	1217	1184	37
433	424	53	3169	3152	197	1409	1376	43
577	568	71	4129	4112	257	2689	2656	83
593	584	73	4513	4496	281	3137	3104	97
641	632	79	4993	4976	311	3329	3296	103
21=3*7			65=5*13			$209=11*19$		
25=5*5			$289=17^2$			$961=31^2$		
49=7*7								

6　$a = p^2$ のとき

連立方程式

- $a = 2^{\varepsilon}\varphi(Q) + 1 + 4k$,
- $b = 2^{\varepsilon}Q = \varphi(a) - 2k$.

において, $a = p^2$ のときを考える.

co$\varphi(a) = p$, co$\varphi(a) + co\varphi(b)$ =p+co$\varphi(b) = 1 + 2k$,

$b = 2^{\varepsilon}Q = p(p-1) - 2k$. この場合はさらに考える必要がある.

7　オイラー余関数の新しい評価式

長野県 飯山高校の生徒さんは次の形に一般化しオイラー余関数の新しい評価式をえた．このような評価式が成立することを私は予想すらしていなかった．

定理 1 (飯山高校) 自然数 $m > 1$ について次の評価式が成り立つ．
$\varepsilon(a) \geq m$ のとき

$$co\varphi(a) \geq a^{\frac{m-1}{m}}$$

とくに $m = 2$ なら,a が素数の平方でないなら $co\varphi(a) \geq \sqrt{a}$
$m = 3$ なら $a = pq$ の場合を除くと $co\varphi(a) \geq \sqrt[3]{a^2}$
Proof.
1. $r = 1$.
$e = e_1.p = p_1$ と書くとき $p^e, e \geq m$ なので

$$co\varphi(a) - a^{\frac{m-1}{m}} = p^{e-1} - p^{\frac{em-e}{m}}$$

$e - 1 - \frac{em-e}{m} = \frac{e-m}{m} \geq 0$ により, 上式は非負.
等号成立は $a = p^m$ のとき.

2. $r \geq 2$.
$P, R, \overline{P}$ を次式で定義する．
$P = \prod_{j=1}^{r} p_j, R = \prod_{j=1}^{r} p_j^{e_j - 1}, \overline{P} = \prod_{j=1}^{r} \overline{p_j}$, を以下で用いる．ただし 素数 p について $\overline{p} = p - 1$ とおく．
$a = PR, \varphi(a) = \overline{P}R$ が成り立つ. それゆえ

$$\begin{aligned} co\varphi(a) - a^{\frac{m-1}{m}} &= co\varphi(a) - \frac{a}{a^{\frac{1}{m}}} \\ &= PR - \overline{P}R - \frac{PR}{a^{\frac{1}{m}}} \end{aligned}$$

この式を R で割ると

$$(co\varphi(a) - a^{\frac{m-1}{m}})/R = P - \overline{P} - \frac{P}{a^{\frac{1}{m}}}.$$

さて $p_1 < p_j, (j > 1)$ なので $p_1^{\frac{e_j}{m}} < p_j^{\frac{e_j}{m}}$.
j について 1 から r について上の式を掛けると

$$p_1^{\frac{\varepsilon(a)}{m}} \leq \prod p_j^{\frac{e_j}{m}} = a^{\frac{1}{m}}.$$

ゆえに $r > 1$ のとき $\varepsilon(a) \geq m$ により

$$a^{\frac{1}{m}} \geq p_1^{\frac{\varepsilon(a)}{m}} \geq p_1.$$

$$P - \overline{P} - \frac{P}{a^{\frac{1}{m}}} \geq P - \overline{P} - \frac{P}{p_1}.$$

$P_0 = \prod_{j=2}^{r} p_j$ とおくとき $P = p_1 P_0$. また $p_1 = \overline{p_1} + 1$ により $\overline{P_0} = \prod_{j=2}^{r} \overline{p_j}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
P - \overline{P} - \frac{P}{p_1} &= (\overline{p_1} + 1)P_0 - \overline{P} - P_0 \\
&= \overline{p_1}P_0 - \overline{p_1}\overline{P_0} \\
&= \overline{p_1}(P_0 - \overline{P_0}) > 0.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
(co\varphi(a) - a^{\frac{m-1}{m}})/R &= P - \overline{P} - \frac{P}{a^{\frac{1}{m}}} \\
&\geq \overline{p_1}(P_0 - \overline{P_0}) > 0.
\end{aligned}
$$

8　ウルトラオイラ完全数

ウルトラ完全数 で出てきた $\sigma(a)$ の代わりに $\varphi(a)$ を用いてウルトラオイラ完全数を考えることができる.

このような一般化にそれほどの意味があるとも言えないが出てきた諸結果は実に目覚しいものである.

$a = 2^e, q = a + 1 + m$:素数, と仮定する.

これからオイラー関数を用いて 2^e を消去する.

最初に $2\varphi(a) = 2^e = q - m - 1$ により $q = 2\varphi(a) + m + 1$ となることに注意する.

$\varphi(q) = q - 1$ に代入して $\varphi(q) = \varphi(2\varphi(a) + m + 1)), q - 1 = a + m$.

$$\varphi(2\varphi(a) + m + 1) = a + m$$

よって $a = \varphi(2\varphi(a) + m + 1)) - m$, $2\varphi(a) = a$ に留意して

$$2\varphi(\varphi(2\varphi(a) + m + 1)) - m) = a$$

ウルトラオイラ完全数の方程式と言い, この解を平行移動 m のウルトラオイラ完全数 (ultra-euler-perfect numbers) という.

ここで, $q = 2\varphi(a) + m + 1$ を擬メルセンヌ数という

命題 3 ウルトラオイラ完全数の方程式において $a = 2^e$ で $q = 2\varphi(a) + m + 1$ が素数ならば a はウルトラオイラ完全数の方程式の解になる.

Proof

ウルトラオイラ完全数の方程式を次のように分解する. $A = 2\varphi(a) + m + 1, B = \varphi(A) - m$ とおくとき $C = 2\varphi(B) = a$ となる.

さて $a = 2^e$ で $q = a + 1 + m$ は素数と仮定する.

$2\varphi(a) = a$ なので, $A = 2\varphi(a) + m + 1 = a + m + 1 = q$ は素数.

$B = \varphi(A) - m = A - 1 - m = 2\varphi(a) = a$.

End

ここで, $a = 2^e$ でウルトラオイラ完全数の方程式の解ならば $q = 2\varphi(a) + m + 1$ は実際に素数かという問いを考える. a が 2^e と書けない場合をも含めて, $q = 2\varphi(a) + m + 1$ を擬メルセンヌ数と呼ぶ.

数値解は実に鮮やかな結果が並ぶ.

表 12: $P = 2, m = -2$, ウルトラオイラー完全数

a	factor	擬メルセンヌ数
4	2^2	3
8	2^3	7
32	2^5	31
128	2^7	127
8192	2^{13}	8191

ここの擬メルセンヌ数は本物の メルセンヌ素数

表 13: $P = 2, m = 0$, ウルトラオイラー完全数

a	factor	擬メルセンヌ数
2	2	3
4	2^2	5
16	2^4	17
256	2^8	257
65536	2^{16}	65537

ここの擬メルセンヌ数は $q = 2^e + 1$ になりフェルマー素数.

表 14: $P = 2, m = 1$, ウルトラオイラー完全数

a	factor	擬メルセンヌ数
2	2	5
4	2^2	7
8	2^3	11
16	2^4	19
64	2^6	67
128	2^7	131
4096	2^{12}	4099
32768	2^{15}	32771
65536	2^{16}	65539
262144	2^{18}	262147

表 15: $P=2, m=3$, ウルトラオイラー完全数

a	factor	擬メルセンヌ数
2	2	7
8	2^3	13
32	2^5	37
2048	2^{11}	2053

9 $m=-7$ で奇跡が起きる

ウルトラオイラー完全数でもスーパーオイラー完全数のときのように解が明らかに無限に出てくる場合があるだろうか. 私は多分ないだろうと思ったがパソコンで計算したら $m=-7$ で奇跡が起きた. これには本当に驚いた. 発見の日と場所を書いておく.

2017 年 12 月 23 日 天皇誕生日, 西国分寺駅に近い都立多摩図書館において.

$2\varphi(\varphi(2\varphi(a)+m+1))-m)=a$ の方程式に $m=-7$ を代入する. $2\varphi(\varphi(2\varphi(a)-6))+7)=a$.

$A=2\varphi(a)+m+1=2\varphi(a)-6$,

$B=\varphi(2\varphi(a)+m+1))-m=\varphi(A)-m=\varphi(A)+7$,

$C=2\varphi(B)=a$ が成り立つ.

パソコンの計算によると $a=4p$ と素数 p で書ける.

$A=2\varphi(4p)-6=4p-10$, $q=2p-5$ は素数のようだ. 証明なしで使う.

$B=\varphi(2q)+7=q+6=r$ も素数のようだ. 証明なしで使う.

$C=2\varphi(B)=2r-2=2(q+6)-2=2q+10=2(2p-5)+10=4p=a$.

これによって, 次の命題が証明できた.

命題 4 素数 p があり, $q=2p-5, r=2p+1$ の 3 個がすべて素数の場合, $a=4p$ は $m=-7$ のときのウルトラオイラー完全数である.

平行移動 $m=-7$ のウルトラオイラー完全数であってパソコンの計算では無限にあるらしい. ここにウルトラ困難な問題が登場した.

パソコンの計算を信じるとこの場合, ウルトラオイラー完全数はこれだけらしい.

このことの証明はとても難しいだろう.

p と $2p+1$ がともに素数の場合 p をソフィージェマンの素数といい, これは無限にあるだろう. しかしその証明はできない難問として名高い. ここではそれに加えて, $q=2p-5$ も素数になるという条件がつく. だから, これらの無限性は証明困難に違いない.

表 16: $P = 2, m = -7$, ウルトラオイラー完全数

$a = 4p$	factor	$4p - 10$	$2p - 5 = q$	$r = 2p - 5 + 6$	$2r - 2$
20	$2^2 * 5$	10	5	11	20
44	$2^2 * 11$	34	17	23	44
92	$2^2 * 23$	82	41	47	92
116	$2^2 * 29$	106	53	59	116
212	$2^2 * 53$	202	101	107	212
356	$2^2 * 89$	346	173	179	356
524	$2^2 * 131$	514	257	263	524
716	$2^2 * 179$	706	353	359	716
932	$2^2 * 233$	922	461	467	932
1124	$2^2 * 281$	1114	557	563	1124
1724	$2^2 * 431$	1714	857	863	1724
1772	$2^2 * 443$	1762	881	887	1772
1964	$2^2 * 491$	1954	977	983	1964
2036	$2^2 * 509$	2026	1013	1019	2036
2372	$2^2 * 593$	2362	1181	1187	2372
2564	$2^2 * 641$	2554	1277	1283	2564
2612	$2^2 * 653$	2602	1301	1307	2612
2732	$2^2 * 683$	2722	1361	1367	2732
2876	$2^2 * 719$	2866	1433	1439	2876
2972	$2^2 * 743$	2962	1481	1487	2972

9.1 $m = -11$ のとき

$m = -11$ のとき $a = 8p$ となるらしい. 読者の研究材料としよう.

9.2 $m = -19$ のとき

$m = -19$. $a = 16p$; ここで例外が起きる.

パソコンの計算による表を見ると $a > 40$ のとき $a = 16p$ 素数 p で書ける.

$A = 2\varphi(16p) - 18 = 16p - 16 - 18 = 28p - 17 - 34 = 2q$, $q = 8p - 17$ は素数のようだ. 証明なしで使う.

$B = \varphi(2q) + 19 = q - 1 + 19 = q + 18 = 8p + 1 = r$ も素数のようだ. 証明なしで使う.

$C = 2\varphi(B) = 2r - 2 = 2(8p + 1) - 2 = 16p = a$.

これによって, 次の命題が証明できた.

命題 5 素数 p があり, $q = 8p - 17, r = 8p + 1$ ともに素数の場合, $a = 16p$ は $m = -7$ のときのウルトラオイラー完全数である.

$m = -21$. $a = 16p$ ここでも例外が起きる.

表 17: $P = 2, m = -11$, ウルトラオイラー完全数

a	factor	p	$q = 4p - 9$	B	C
24	$2^3 * 3$	3	3	13	24
56	$2^3 * 7$	7	19	29	56
104	$2^3 * 13$	13	43	53	104
296	$2^3 * 37$	37	139	149	296
344	$2^3 * 43$	43	163	173	344
584	$2^3 * 73$	73	283	293	584
632	$2^3 * 79$	79	307	317	632
776	$2^3 * 97$	97	379	389	776
1016	$2^3 * 127$	127	499	509	1016
1112	$2^3 * 139$	139	547	557	1112
1304	$2^3 * 163$	163	643	653	1304
1592	$2^3 * 199$	199	787	797	1592
2984	$2^3 * 373$	373	1483	1493	2984
3272	$2^3 * 409$	409	1627	1637	3272
3464	$2^3 * 433$	433	1723	1733	3464
3992	$2^3 * 499$	499	1987	1997	3992

表 18: $P = 2, m = -19$, ウルトラオイラー完全数

a	factor	p	$q = 4p - 9$	B	C
16	2^4				
40	$2^3 * 5$				
80	$2^4 * 5$	5	23	41	
176	$2^4 * 11$	11	71	89	
1712	$2^4 * 107$	107	839	857	
2096	$2^4 * 131$	131	1031	1049	
6416	$2^4 * 401$	401	3191	3209	
7856	$2^4 * 491$	491	3911	3929	
9872	$2^4 * 617$	617	4919	4937	
10832	$2^4 * 677$	677	5399	5417	
13136	$2^4 * 821$	821	6551	6569	
15152	$2^4 * 947$	947	7559	7577	
18992	$2^4 * 1187$	1187	9479	9497	
25616	$2^4 * 1601$	1601	12791	12809	
29936	$2^4 * 1871$	1871	14951	14969	
33296	$2^4 * 2081$	2081	16631	16649	
33776	$2^4 * 2111$	2111	16871	16889	
39152	$2^4 * 2447$	2447	19559	19577	
40496	$2^4 * 2531$	2531	20231	20249	
43856	$2^4 * 2741$	2741	21911	21929	
44816	$2^4 * 2801$	2801	22391	22409	
45392	$2^4 * 2837$	2837	22679	22697	

表 19: $P = 2, m = -21$, ウルトラオイラー完全数

a	factor	p
40	$2^3 * 5$	
80	$2^4 * 5$	5
272	$2^4 * 17$	17
464	$2^4 * 29$	29
1712	$2^4 * 107$	107
2384	$2^4 * 149$	149
3824	$2^4 * 239$	239
7184	$2^4 * 449$	449
7664	$2^4 * 479$	479
8144	$2^4 * 509$	509
9872	$2^4 * 617$	617
10832	$2^4 * 677$	677
15152	$2^4 * 947$	947
20624	$2^4 * 1289$	1289
23792	$2^4 * 1487$	1487